

曲線描繪 (M2A 冊 第 6 章)

甲部

1. 對於所有 $x \neq 3$ ，定義 $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。

- (a) 求 G 的極大點、極小點和漸近線。
 (b) 描繪 G 。

2. 對於所有 $x \neq 4$ ，定義 $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 12}{x - 4}$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。

- (a) 求 G 的漸近線。
 (b) 求平行於直線 $5x - 4y + 1 = 0$ 的切線方程。

3. 對所有實數 x ，定義 $f(x) = \frac{A}{x^2 + 2x + 13}$ ，其中 A 為一常數。已知 $f(x)$ 的極值為 4。

- (a) 求 $f'(x)$ 。
 (b) 某人宣稱 $y = f(x)$ 的圖像最少有兩條漸近線。你是否同意？試解釋你的答案。
 (c) 求 $y = f(x)$ 的圖像的拐點。

4. 考慮一有理函數 $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2 + 12}$ 。已知

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-

(「+」和「-」分別表示「正值」和「負值」。)

- (a) 求所有極大點、極小點和拐點。
 (b) 求 $y = f(x)$ 的圖像的漸近線。
 (c) 描繪 $y = f(x)$ 的圖像。

5. 考慮一有理函數 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 。已知

x	$x < -5$	-5	$-5 < x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	未下定義	+	0	+
$f''(x)$	-	-	-	未下定義	-	0	+

(「+」和「-」分別表示「正值」和「負值」。)

- (a) 求所有極大點、極小點和拐點。
 (b) 求 $y = f(x)$ 的圖像的漸近線。
 (c) 描繪 $y = f(x)$ 的圖像。

6. 對於所有 $x \neq 3$ 且 $x \neq -3$ ，定義 $f(x) = \frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3} - 1$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。
- 求 G 的 x 截距和 y 截距。
 - (i) 求 $f'(x)$ 且證明 $f''(x) = \frac{432(x^2+3)}{(x-3)^3(x+3)^3}$ 。
(ii) 由此，求 G 的相對極值及證明該圖像沒有拐點。
 - 求 G 的漸近線。
 - 描繪 G 。
7. 對於所有 $x \neq -1$ ，定義 $f(x) = \frac{-x^2+8x-7}{x+1}$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。
- 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 。
 - 求 G 的所有相對極點和拐點。
 - 求 G 的漸近線。
 - 描繪 G 。
8. 對於所有 $x \neq 1$ ，定義 $f(x) = \frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。
- 求 G 的 x 截距和 y 截距。
 - (i) 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 。
(ii) 求 G 的所有相對極點和拐點。
 - 求 G 的漸近線。
 - 描繪 G 。
9. 設 a 和 b 為常數。對所有實數 x ，定義 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 12$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 C 。已知 $P(4, -20)$ 是 C 的轉向點。
- 求 a 和 b 。
 - P 是否 C 的極小點？試解釋你的答案。
 - 求 $f(x)$ 的極大值。
 - 求 C 的拐點。
 - 描繪 C 。
10. 設 a 和 b 為常數。對所有實數 x ，定義 $f(x) = ax^4 + bx^3 + 2$ 。把 $y = f(x)$ 的圖像記為 C 。已知 $P(3, -79)$ 是 C 的轉向點。
- 求 a 和 b 。
 - P 是否 C 的極小點？試解釋你的答案。
 - 某人宣稱 C 的極大點存在。你是否同意？試解釋你的答案。
 - 求 C 的拐點。
 - 描繪 C 。