

## 課堂工作紙 13.4

學習目標：利用向量積的性質求兩個向量的向量積。

對於三維空間內任何兩個向量  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  和  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ，

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

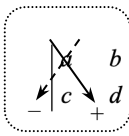
亦可寫成：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

1. 求下列各向量積。

(a)  $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$

(b)  $(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 4\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 1 個向量} \\ \leftarrow \text{第 2 個向量} \end{matrix}$$


$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$=$$

三維空間內，對於任何向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$ ，及純量  $\lambda$ ，下列各項均成立。

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

2.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

3.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

4.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

5.  $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

6.  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

2. 已知  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$  和  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 。求下列各向量積。

(a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(b)  $(2\mathbf{b}) \times \mathbf{a}$

(a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$

$$=$$

(b)  $(2\mathbf{b}) \times \mathbf{a} = ( )(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

◀ 根據性質 5。

$= ( )[( )(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$

◀ 根據性質 2。

$=$

3. 已知  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  和  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 。求下列各向量積。

(a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(b)  $(2\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a})$

→練習 13.4: 9

4. 已知  $\mathbf{a} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  和  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 。

(a) 求  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

(b) 若  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  和  $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ ，求  $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ 。

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = ( \quad ) \times ( \quad )$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{a} = ? \\ \mathbf{b} \times \mathbf{b} = ? \end{array}$$

5. 已知  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  和  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 。

(a) 求  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。

(b) 若  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  和  $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ，求  $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ 。

→練習 13.4: 18, 19

### 進階題

6. 若兩個向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  之間的夾角是  $60^\circ$ ，且  $|\mathbf{a}| = 4$  和  $|\mathbf{b}| = 5$ ，求  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 。

姓名：\_\_\_\_\_（ ） 班别：\_\_\_\_\_ 日期：\_\_\_\_\_